

Grafos invariantes y dinámica de una familia de aplicaciones lineales a trozos.

VÍCTOR MAÑOSA

*Departament de Matemàtiques y Institut de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
E-mail: victor.manosa@upc.edu*

Los sistemas dinámicos lineales a trozos aparecen como modelos en diversos contextos y aplicaciones, como en el estudio de sistemas mecánicos con fricción, la electrónica de potencia, los sistemas de control, o la economía y llevan siendo objeto de interés desde hace décadas. A pesar de su aparente sencillez, estos sistemas son *profundamente no lineales* y, al menos en el caso discreto, exhiben una gran riqueza dinámica.

Por lo que se refiere a los sistemas dinámicos discretos, en los últimos años ha habido un interés creciente en el estudio de aplicaciones lineales *continuas* a trozos, en parte debido a sus aplicaciones prácticas en biología evolutiva, redes neuronales, ecología y economía; y en parte debido a su potencial riqueza dinámica: ver, por ejemplo, la célebre aplicación introducida por R. Lozi a finales de los 70 del siglo pasado, y la llamada “Gingerbread-map”, estudiada por R. Devaney en los años 80, que exhiben atractores extraños. Este tipo de aplicaciones lineales a trozos definidas por valores absolutos siguen siendo objeto de mucho interés.

En esta charla expondré brevemente algunos resultados que hemos obtenido recientemente con A. Cima, A. Gasull y F. Mañosas de la UAB, con respecto a la familia de aplicaciones:

$$F_{a,b}(x, y) = (|x| - y + a, x - |y| + b),$$

donde $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En los últimos quince años han aparecido algunos trabajos que analizan diferentes casos particulares de esta familia. Esencialmente, estos trabajos caracterizan casos en los que todas las órbitas convergen a puntos fijos, órbitas periódicas o eventualmente periódicas. De hecho, generalmente se cree que este es el comportamiento dinámico de esta familia para la mayoría de valores de los parámetros.

En la extensa literatura existente sólo se pueden encontrar resultados parciales y aislados. Los propios autores de estos trabajos destacan que no existe una metodología global para abordar el estudio sistemático del problema. Nuestro interés ha sido abordar el estudio de la familia desde una perspectiva unificada.

Como veremos, la dinámica global de la familia $F_{a,b}$ es sustancialmente más rica de lo expresado en los trabajos existentes hasta la fecha. Así, veremos por ejemplo, que para $a < 0$ existen valores de b para los que se presentan algunos comportamientos caóticos en objetos de dimensión 1 (grafos) que capturan la dinámica asintótica de la aplicación.

En la charla veremos que para $a \geq 0$ toda la dinámica es, efectivamente, preperiódica en un número finito de pasos. Nos centraremos, sin embargo, en el caso $a < 0$, donde para cada valor de b existe un grafo invariante que captura la dinámica en \mathbb{R}^2 de la aplicación. Veremos cómo son estos grafos y qué dinámicas aparecen en estos, caracterizando cuando la entropía topológica de la aplicación restringida al grafo es cero y cuando es positiva.