Grafos invariantes y dinámica de una familia de aplicaciones lineales a trozos.

A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas, Víctor Mañosa*

*Departament de Matemàtiques y Institut de Matemàtiques IMTech
Universitat Politècnica de Catalunya.

Workshop on Dynamical Systems

Universitat de Lleida, 11-12 de Enero de 2024.

Dedicado al Profesor Jaume Giné en ocasión de su 60 aniversario.

Cima, Gasull, Mañosas, M. *Invariant graphs and dynamics of a family of piecewise continuous.* En preparación.

Jaume, es un placer poder venir a celebrar contigo esta parte del camino que hemos recorrido juntos.

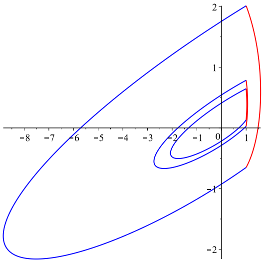
Muchas gracias por darnos esta oportunidad de volver a estar juntos con compañeros estimados.

Algunos de nosotros, con Jaume, en Almagro la primavera del año 2000.

Sistemas lineales a trozos

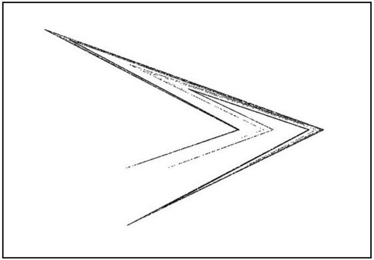
Todos nosotros somos conscientes de la importancia de los *sistemas dinámicos continuos* a trozos.

Entre otros problemas, se intenta ver el máximo número de ciclos límite.



Gasull, M. Periodic orbits of discrete and continuous dynamical systems via Poincaré-Miranda theorem. DCDS-B.

En el caso de *sistemas discretos* las dinámicas pueden ser extremadamente complejas.



Atractor extraño para la Aplicación de Lozi (1978)

$$F(x, y) = (1 - \alpha|x| + y, \beta y)$$

En los últimos dos años hemos estudiado esta familia de SDD a trozos:

$$F(x,y) = (|x| - y + a, x - |y| + b),$$

con $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Cima, Gasull, Mañosa, Mañosas. Invariant graphs and dynamics of a family of piecewise continuous maps. En preparación (2024).

Observemos que en cada cuadrante Q_i la aplicación F viene descrita por una aplicación lineal.

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}, \quad & F_1(x,y) &= (x - y + a, x - y + b),\\
Q_2 &= \{(x,y) : x \leq 0, y \geq 0\}, \quad & F_2(x,y) &= (-x - y + a, x - y + b),\\
Q_3 &= \{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0\}, \quad & F_3(x,y) &= (-x - y + a, x + y + b),\\
Q_4 &= \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 0\}, \quad & F_4(x,y) &= (x - y + a, x + y + b).
\end{aligned}$$

Usando la conjugación dada por:

$$\lambda F_{a,b}(x/\lambda, y/\lambda) = F_{\lambda a,\lambda b}(x, y),$$

podemos considerar los casos $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Para $a \geq 0$ la dinámica es pre-periódica:

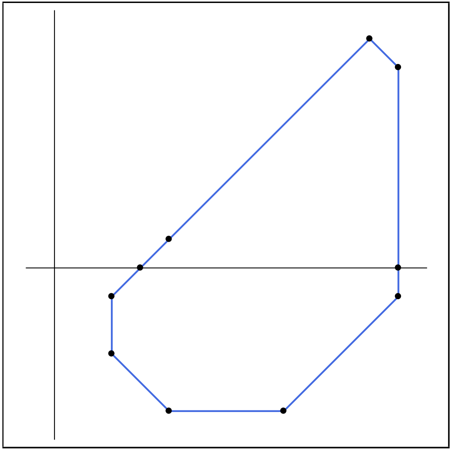
Teorema A

Si $a \geq 0$ entonces para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ existe $n \geq 0$ (que depende de $\mathbf{x}$) tal que $F^n(\mathbf{x}) \in Per(F)$, donde $Per(F)$ es el conjunto de puntos periódicos de F. Además, el conjunto $Per(F)$ tiene cardinalidad finita.

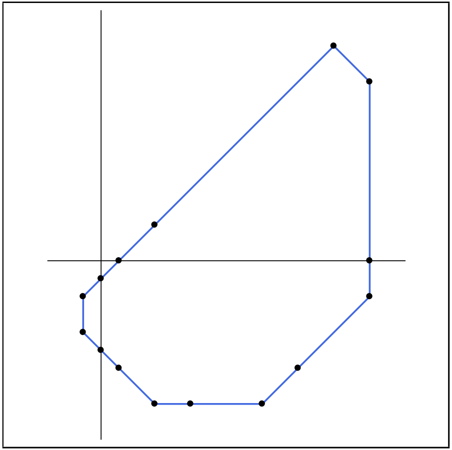
Los casos interesantes, dinámicamente, se presentan para $a = -1$

Teorema B

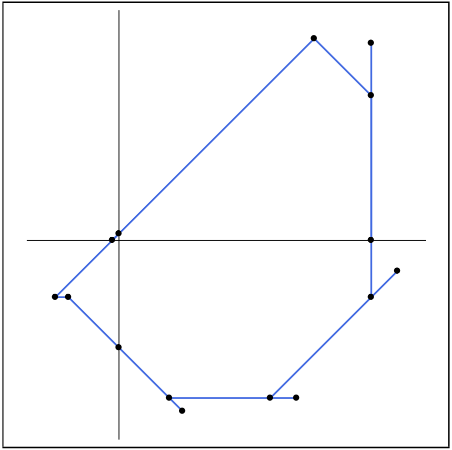
Sea $a = -1$. Para todo $b \in \mathbb{R}$ existe un grafo compacto Γ (que depende de b) que es invariante bajo la aplicación F tal que para todo $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe $n_{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}$ (que depende de $\mathbf{x}$) tal que $F^{n_{\mathbf{x}}}(x, y) \in \Gamma$.



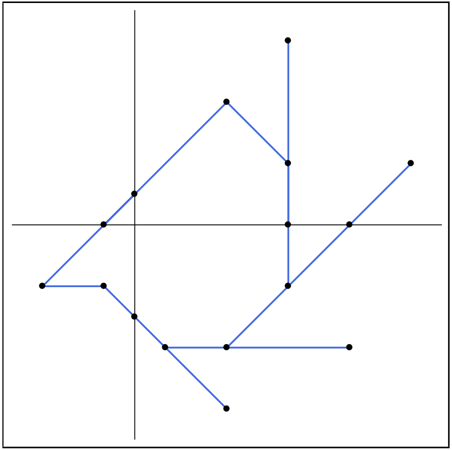
$\boxed{a = -1,\ -2 < b \leq -1}$



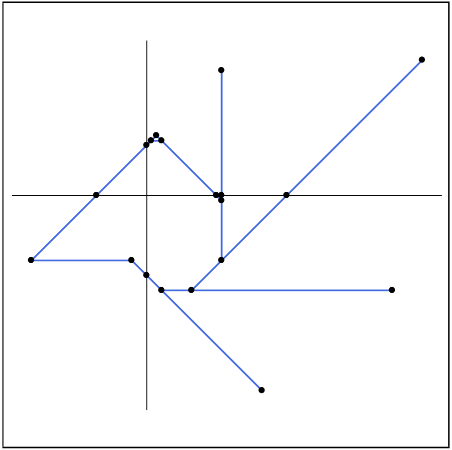
$\boxed{a=-1,\ -1<b\leq -3/4}$



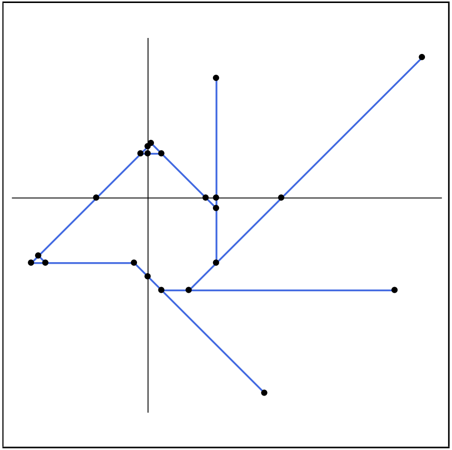
$$\boxed{a = -1,\ -3/4 < b \leq -1/4}$$



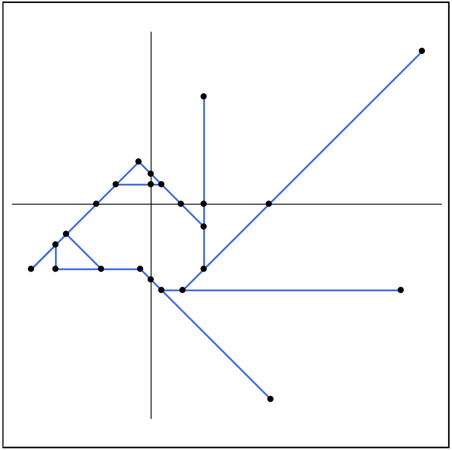
$\boxed{a=-1,\ -1/4<b\le -2/9}$



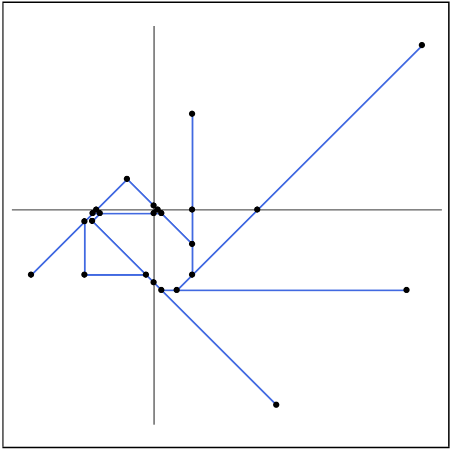
$\boxed{a = -1,\ -2/9 < b \leq -1/5}$



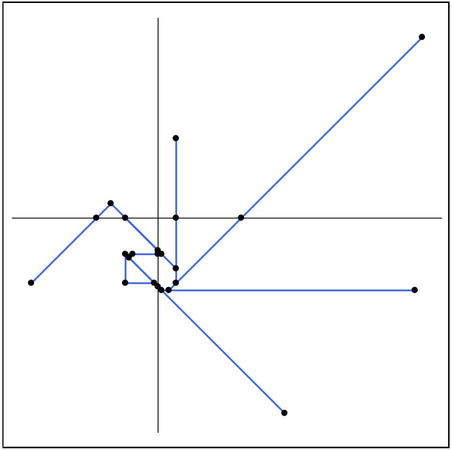
$\boxed{a = -1,\ -1/5 < b \leq -1/8}$



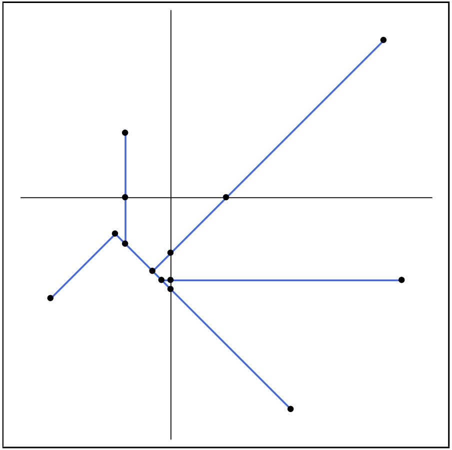
$\boxed{a = -1,\ -1/8 < b \leq -1/9}$



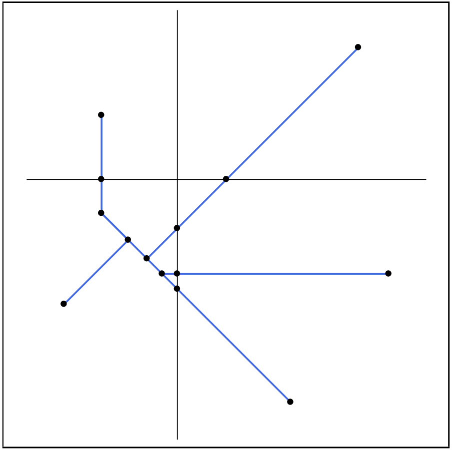
$a = -1,\ -1/9 < b < 0$



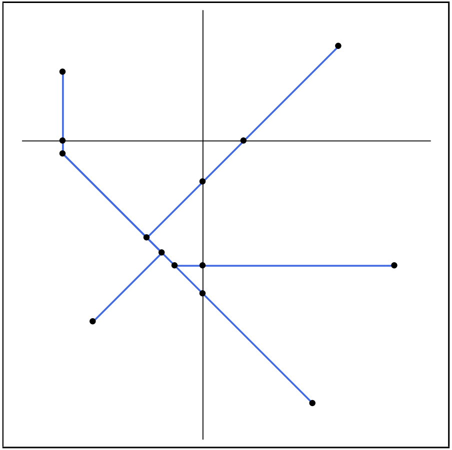
$\boxed{a = -1,\ 0 \le b \le 1/10}$



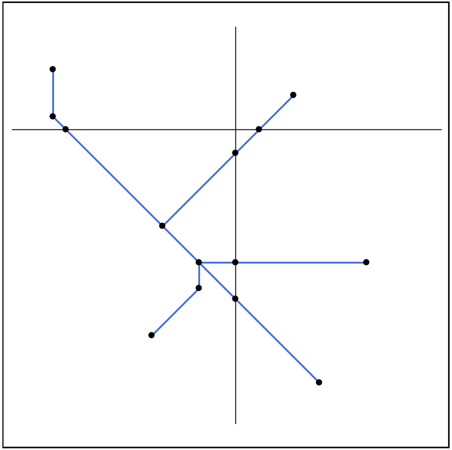
$\boxed{a = -1,\ 1/10 < b \leq 1/7}$



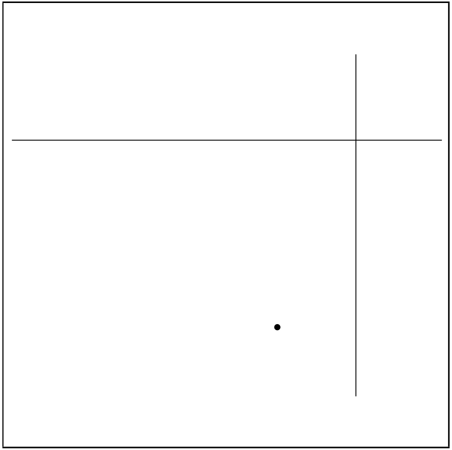
$a = -1,\ 1/7 < b \leq 1/6$



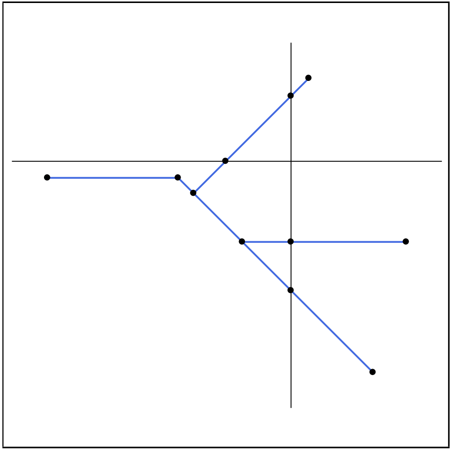
$\boxed{a = -1,\ 1/6 < b \leq 3/16}$



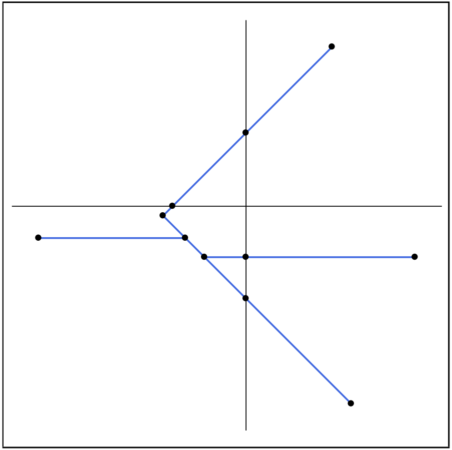
$a = -1$, $3/16 < b < 4/15$



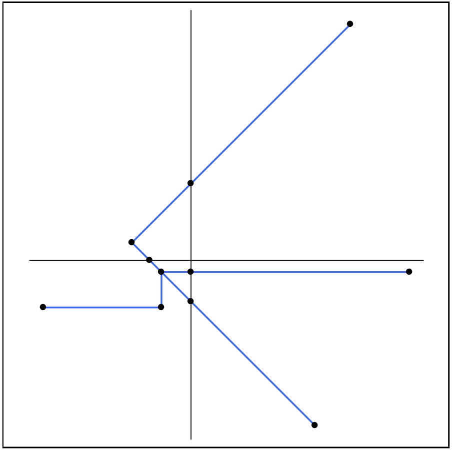
$\boxed{a = -1,\ 4/15 < b \le 2/7}$



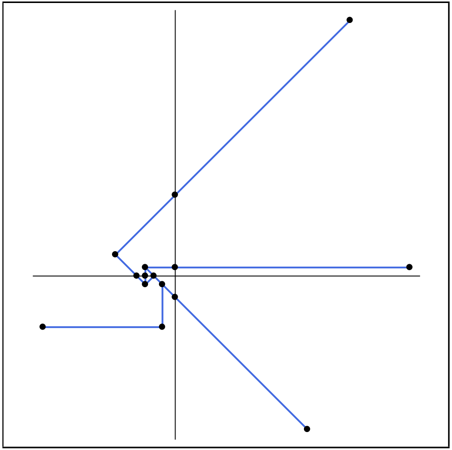
$a = -1,\ 2/7 < b \leq 1/3$



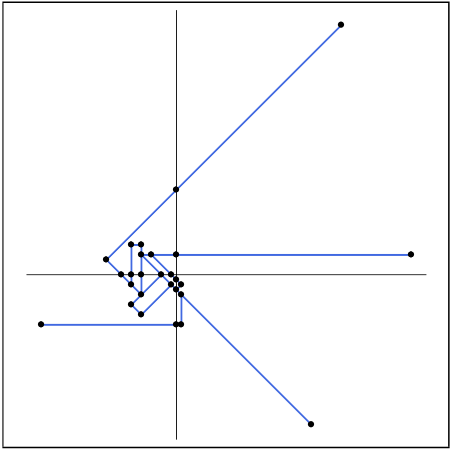
$\boxed{a = -1,\ 1/3 < b \leq 1/2}$



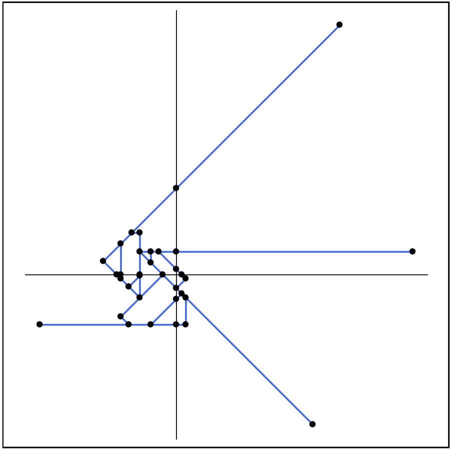
$\boxed{a=-1,\ 1/2<b\leq 2/3}$



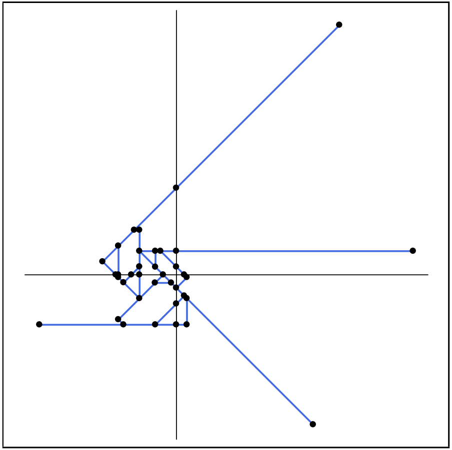
$a = -1,\ 2/3 < b \leq 5/7$



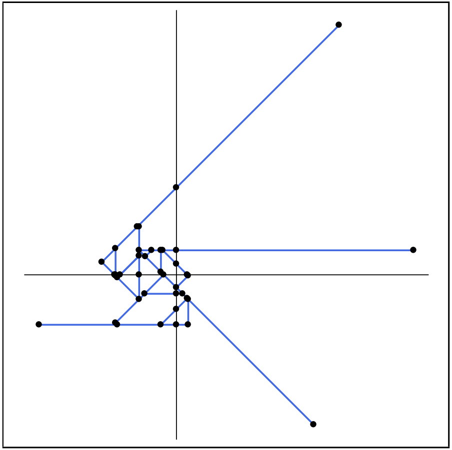
$a = -1,\ 5/7 < b \leq 19/26$



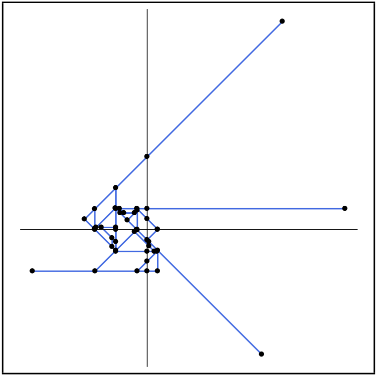
$a = -1,\ 19/26 < b \leq 20/27$



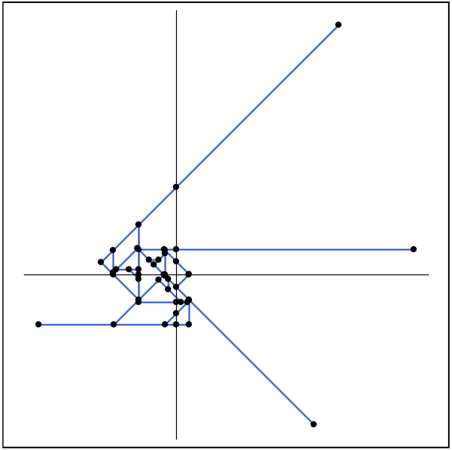
$a = -1,\ 20/27 < b \leq 3/4$



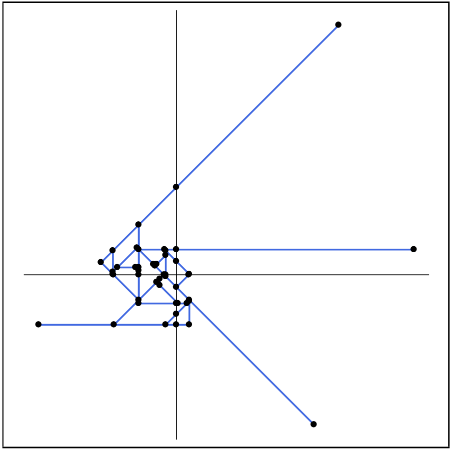
$\boxed{a = -1,\ 3/4 < b \leq 154/205}$



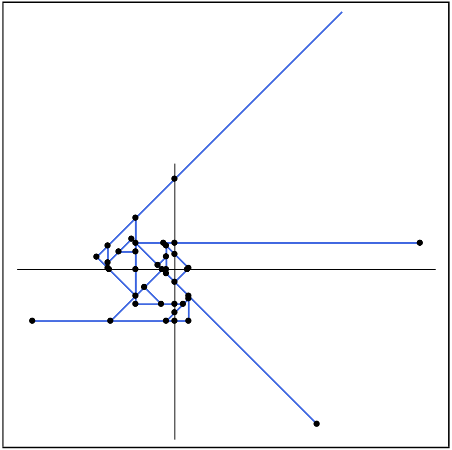
$\boxed{a = -1,\ 154/205 < b \leq 155/206}$



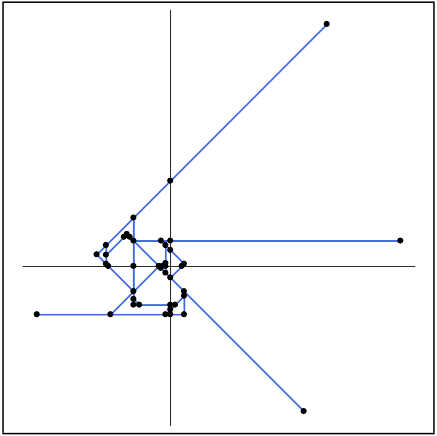
$\boxed{a = -1,\ 155/206 < b \leq 58/77}$



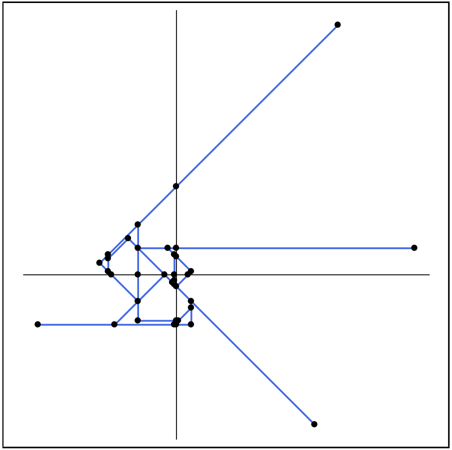
$\boxed{a = -1,\ 58/77 < b \leq 19/25}$



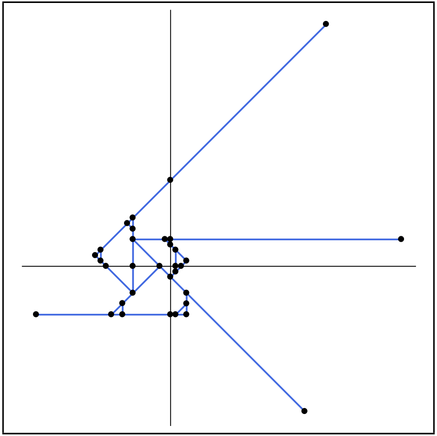
$\boxed{a = -1,\ 19/25 < b \leq 29/38}$



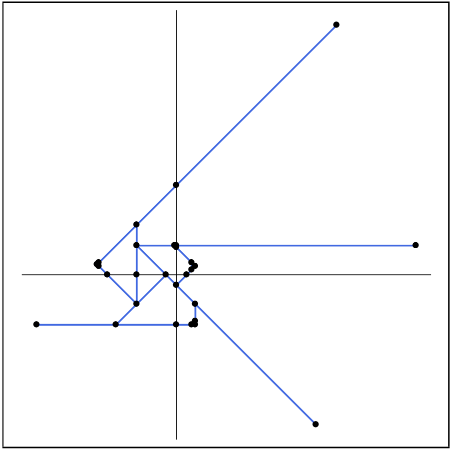
$a = -1,\ 29/38 < b \leq 10/13$



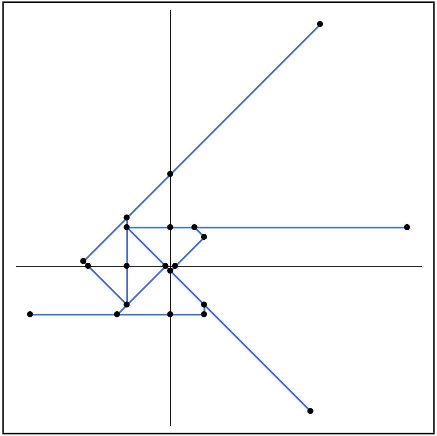
$a = -1,\ 10/13 < b \leq 11/14$



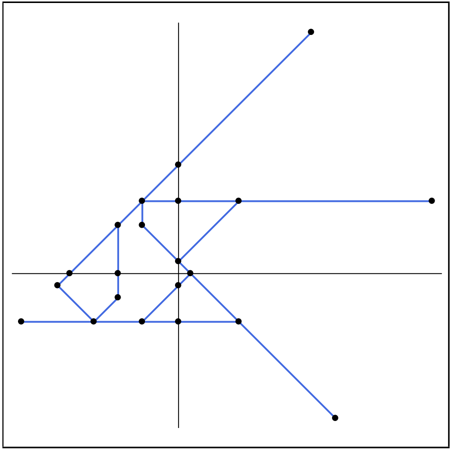
$a = -1,\ 11/14 < b \leq 4/5$



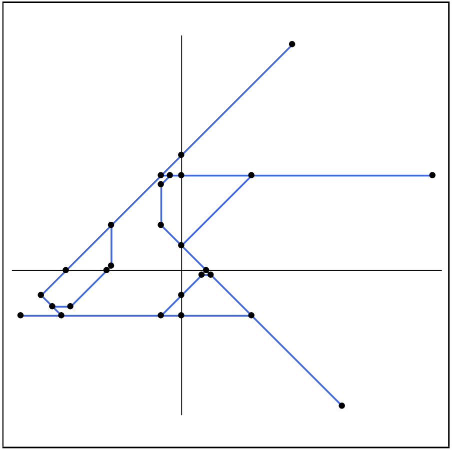
$\boxed{a = -1,\ 4/5 < b \leq 1}$



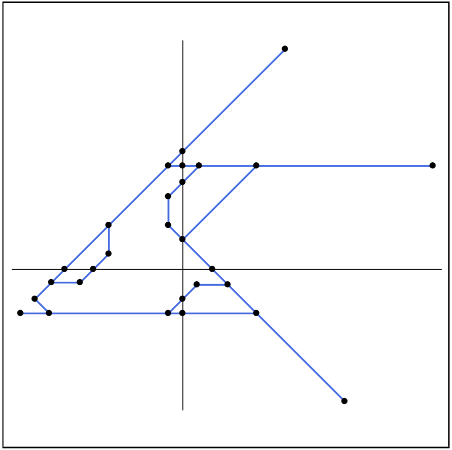
$\boxed{a = -1,\ 1 < b \leq 3/2}$



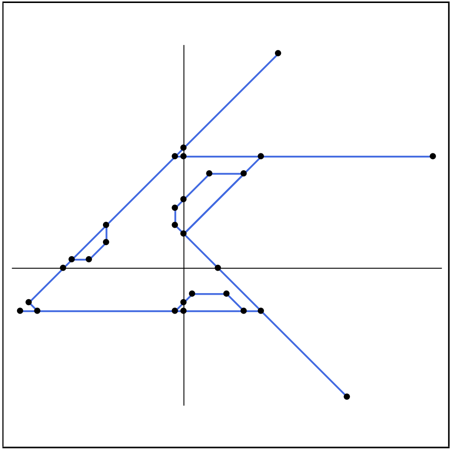
$\boxed{a = -1,\ 3/2 < b \leq 8/5}$



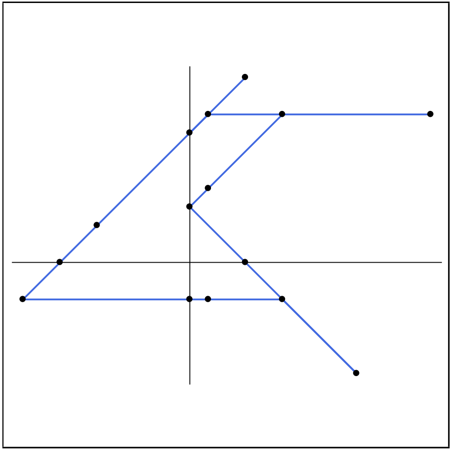
$\boxed{a = -1,\ 8/5 < b \leq 7/4}$



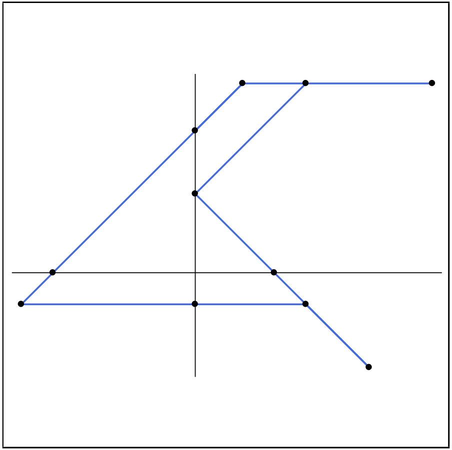
$\boxed{a = -1,\ 7/4 < b < 2}$



$\boxed{a = -1,\ 2 \leq b < 3}$



$\boxed{a=-1,\ b\geq 3}$



Para demostrar el Teorema B se debe:

1. Demostrar que para todo b las órbitas de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ alcanzan el algún momento el conjunto $Q_1 \cup Q_3$.

Proposición 1

Para $a = -1$ i $b \in \mathbb{R}$, la órbita de todo punto en $Q_2 \cup Q_4$ alcanza $Q_1 \cup Q_3$, excepto el punto fijo en Q_2 $(b > 1/2)$; los puntos fijos en Q_4, $(b < 0)$; y una OP_3 en $Q_2 \cup Q_4$ $(3/4 < b < 2)$.

2. Demostrar que para todo b, toda órbita con condiciones iniciales en $Q_1 \cup Q_3$ alcanza un grafo invariante Γ.

   Previamente:

   2.1 Hay que caracterizar el grafo Γ.
   2.2 Hay que demostrar su invariancia.

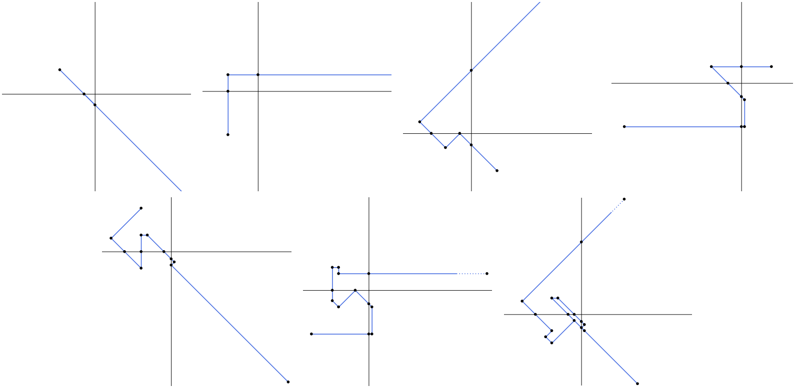
Proposición 2

Sea $a = -1$, entonces:

(a) Para todo $b \in \mathbb{R}$ existe un grafo compacto Γ invariante por F.

(b) Para todo $b \in \mathbb{R}$ y para $(x, y) \in Q_1 \cup Q_3$ entonces $F^{11}(x, y) \in \Gamma$.

Proposición 2. Ejemplo: $a = -1$, $2/3 < b \leq 5/7$.

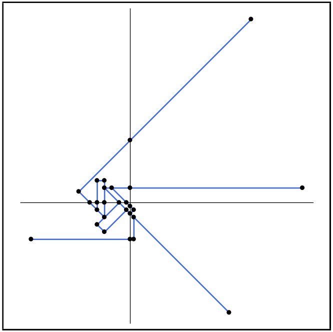


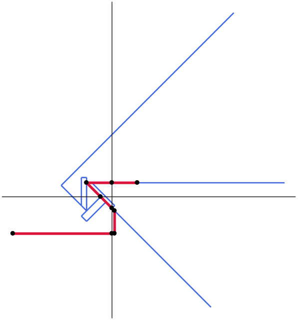
Iterados de Q_3 para $a = -1$ y $2/3 < b \leq 5/7$.

Observamos que los siguientes iterados permanecen en $\Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$. Por tanto:

$$\Gamma = \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7.$$

Ahora habría que comprobar que $\Gamma = \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 \cup \Gamma_7$ es invariante.





Para $2/3 < b \leq 5/7$, obtenemos

$$F^4(Q_3) = \Gamma_4 \subset \Gamma.$$

Análogamente $F^5(Q_1) \subset \Gamma$

En general: sean N_1 y N_3 tales que $F^{N_1}(Q_1)$ y $F^{N_3}(Q_3)$ quedan contenidos en Γ:

	$b \leqslant -2$	$-2 < b \leqslant -1$	$-1 < b \leqslant -3/4$	$-3/4 < b \leqslant -1/4$
N_1	8	6	6	6
N_3	5	5	5	5
	$-1/4 < b \leqslant -2/9$	$-2/9 < b \leqslant -1/5$	$-1/5 < b \leqslant -1/8$	$-1/8 < b \leqslant -1/9$
N_1	5	5	5	5
N_3	4	4	4	4
	$-1/9 < b < 0$	$0 \leqslant b \leqslant 1/10$	$1/10 < b \leqslant 1/7$	$1/7 < b \leqslant 1/6$
N_1	5	6	6	6
N_3	4	4	4	4
	$1/6 < b \leqslant 3/16$	$3/16 < b < 4/15$	$4/15 \leqslant b \leqslant 2/7$	$2/7 < b \leqslant 1/3$
N_1	6	11	6	6
N_3	4	4	4	4

	$1/3 < b \leqslant 1/2$	$1/2 < b \leqslant 2/3$	$2/3 < b \leqslant 5/7$	$5/7 < b \leqslant 19/26$
N_1	6	6	5	5
N_3	4	4	4	4
	$19/26 < b \leqslant 20/27$	$20/27 < b \leqslant 3/4$	$3/4 < b \leqslant 154/205$	$154/205 < b \leqslant 155/206$
N_1	5	5	5	5
N_3	4	4	4	4
	$154/206 < b \leqslant 58/77$	$58/77 < b \leqslant 19/25$	$19/25 < b \leqslant 29/38$	$29/38 < b \leqslant 10/13$
N_1	5	5	5	5
N_3	4	4	4	4
	$10/13 < b \leqslant 11/14$	$11/14 < b \leqslant 4/5$	$4/5 < b \leqslant 1$	$1 < b \leqslant 3/2$
N_1	5	5	5	5
N_3	4	4	4	4
	$3/2 < b \leqslant 8/5$	$8/5 < b \leqslant 7/4$	$7/4 < b < 2$	$2 \leqslant b < 3$ and $3 \leqslant b$
N_1	5	5	5	5
N_3	4	4	5	5

Sin entrar en los casos específicos, una visión global del la dinámica que podemos encontrar vendría dada por este resultado:

Teorema C

Consideremos $a = -1$. Para cada $b \in \mathbb{R}$ consideramos la aplicación F restringida al grafo invariante correspondiente Γ. Entonces

(a) Para $b \in (-\infty, -112/137] \cup [-1/36, 603/874] \cup \{1\} \cup [8, \infty)$ la aplicación $F|_\Gamma$ tiene entropía topológica cero.

(b) Para $b \in [-111/136, -1/36) \cup [4804/6963, 1) \cup (1, 8)$ tiene entropía topológica positiva.

(c) Para $b \in (-112/137, -111/136)$ y $b \in (603/874, 4804/6963)$ hay una transición de entropía cero a entropía positiva.

Tenemos una descripción más detallada del apartado (c). Por razones de tiempo me voy a centrar a dar una cierta visión de las técnicas que usamos para demostrar los apartados (a) y (b).

Una partición finita de Γ, $\mathcal{P} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ es una *monopartición* si $F(I_i)$ es un intervalo y $F|_{I_i}$ es continua y monótona para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.
El *itinerario de longitud m de x* es la secuencia de símbolos

$$I_m(x) = A(x)A(f(x)) \ldots A(f^{m-1}(x)).$$

Sea $N(F, \mathcal{P}, m)$ el número de itinerarios diferentes de longitud m.

Lema (definición de la *Entropía topológica*)

Sea $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ una aplicación monótona por partes en un grafo compacto G. Sea $\mathcal{P}$ una monopartición. Entonces llamamos *número de crecimiento* de F a $s(F) := \lim_m \sqrt[m]{N(F, \mathcal{P}, m)}$ que existe y es independiente de la monopartición $\mathcal{P}$, y

$$h(F) := \ln \left(\lim_m \sqrt[m]{N(F, \mathcal{P}, m)} \right),$$

es la *entropía topológica* de F.

Partición de Markov

$\mathcal{P}$ es *partición de Markov* si para todos $I \in \mathcal{P}$ $F(I)$ es la unión de algunos elementos de $\mathcal{P}$.

Si $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ y $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ es una *monopartición*. La *matriz* $M(F, \mathcal{P})$ *asociada a* $\mathcal{P}$ es

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } I_j \subset f(I_i); \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Denotamos por $r(\mathcal{P})$ al radio espectral. Del Teorema de Perron-Frobenius sabemos que el radio espectral se alcanza en un valor propio real positivo.

Lema

Sea $F : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ una aplicación monótona por partes en un grafo compacto y sea $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_n\}$ una monopartición. Entonces

$$r(\mathcal{P}) \leq s(F).$$

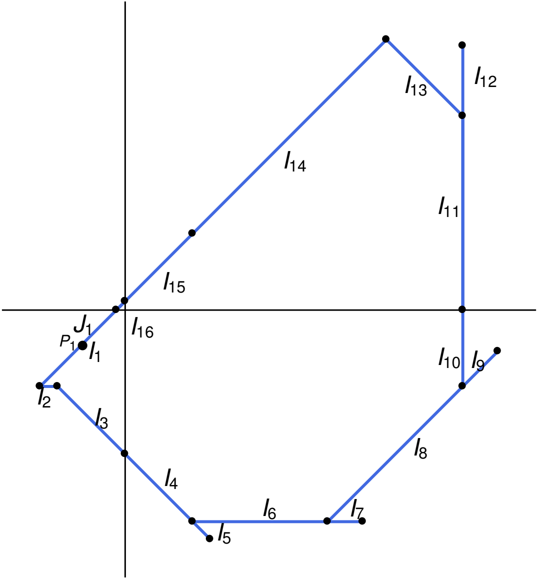
Además, si $\mathcal{P}$ es Markov, entonces $r(\mathcal{P}) = s(F)$.

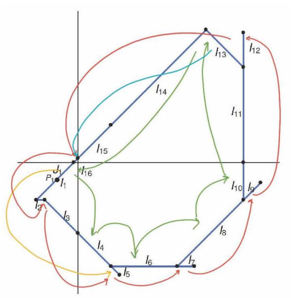
Por lo tanto, para matrices de Markov

$$h(F) = \ln\left(r(\mathcal{P})\right),$$

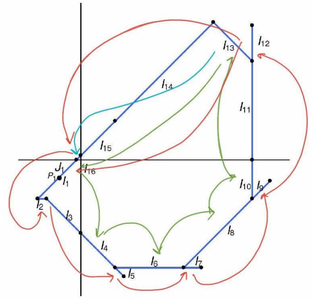
donde $r(\mathcal{P})$ es el radio espectral.

Se dan distintas dinámicas para un mismo grafo. Ejemplo: $a = -1,\ -1 < b \leq -3/4$





$-1 < b \leq -7/8$



$-7/9 \leq b \leq -3/4$

Para $-1 < b \leq -\mathbf{7/8}$

$$\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r] \arrow[rrrrrrrr, bend left] & I_4 \arrow[r] & I_6 \arrow[r] & I_8 \arrow[r] & I_{10} \arrow[r] & I_{13} \arrow[r] \arrow[lllll, bend left] & I_{16} \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I_5 \arrow[r] & I_7 \arrow[r] & I_9 \arrow[r] & I_{12} \arrow[lllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Para $-7/9 \leq b \leq -3/4$ *al menos* tenemos:

$$\begin{tikzcd}
J_1 \arrow[r] & I_4 \arrow[r] & I_6 \arrow[r] & I_8 \arrow[r] & I_{10} \arrow[r] & I_{13} \arrow[r] \arrow[lllll, bend left] & I_{16} \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I_5 \arrow[r] & I_7 \arrow[r] & I_9 \arrow[r] & I_{12} \arrow[lllll, bend left] \arrow[lllllllllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

Para $-1 < b \leq -7/8$ tenemos “menos dinámica” que para $b = -7/8$. En ese caso:

$$
\begin{tikzcd}
I_1 \arrow[r] \arrow[rrrrrrrr, bend left] & I_4 \arrow[r] & I_6 \arrow[r] & I_8 \arrow[r] & I_{10} \arrow[r] & I_{13} \arrow[r] \arrow[lllll, bend left] & I_{16} \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I_5 \arrow[r] & I_7 \arrow[r] & I_9 \arrow[r] & I_{12} \arrow[lllll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

y la matriz de Markov:

$$
M(F,\mathcal{P}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

El polinomio característico es $\left(\lambda^6 - 1\right)^2$, por tanto, el logaritmo de su radio espectral, la entropía, es cero.

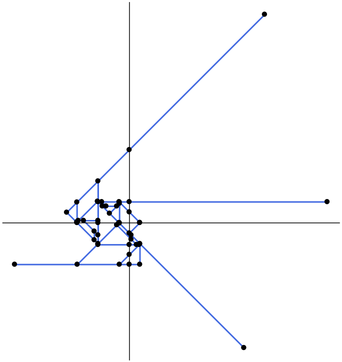
Para $-7/9 < b \leq -3/4$ como mínimo tenemos:

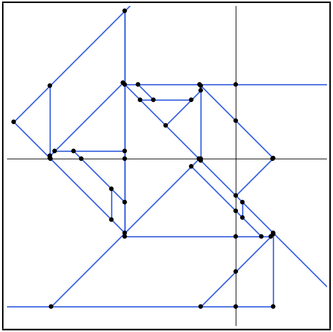
$$
\begin{tikzcd}
J_1 \arrow[r] & I_4 \arrow[r] & I_6 \arrow[r] & I_8 \arrow[r] & I_{10} \arrow[r] & I_{13} \arrow[r] \arrow[lllll, bend left] & I_{16} \arrow[r] & I_2 \arrow[r] & I_5 \arrow[r] & I_7 \arrow[r] & I_9 \arrow[r] & I_{12} \arrow[lllll, bend left] \arrow[lllllllllll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$$
M(F, \mathcal{P}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}.
$$

El polinomio característico es $\lambda^6(\lambda^6 - 2)$. El radio espectral es $r \approx 1{,}122462048$, por lo tanto

$$h_b(F) \geq \ln(r) \approx 0{,}1155245298.$$

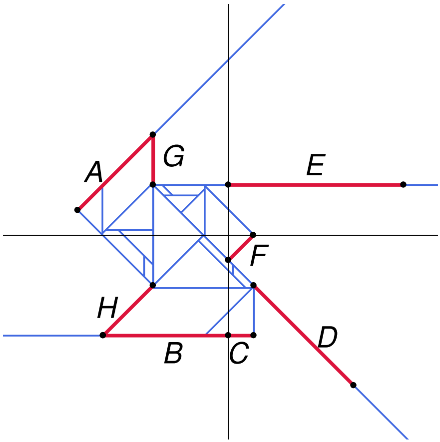




Para $3/4 < b \leq 154/205$, existe la dinámica parcial

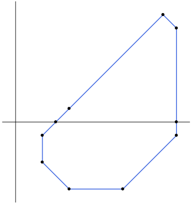
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[r] & D \arrow[r] & E \arrow[lll, bend right] & \\
& C \arrow[r] & F \arrow[r] & G \arrow[r] & H \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

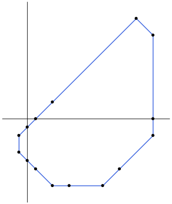
El segmento A se llama una *Roma*: los dos únicos ciclos, *ABDE* y *ACFGHDE*, pasan por A y que podemos concatenar arbitrariamente y de forma indefinida. La entropía es positiva.



Qué tenemos en los casos de **entropía cero**?

1. En la mayoría de casos observamos **OP repulsoras y dinámica pre-periódica en un número finito de iterados**.
2. Para $b \leq -1$ el grafo Γ es un círculo topológico $\Rightarrow$ su dinámica queda caracterizada por el *número de rotación*.





Número de rotación

Dado un homeo g de grado 1 de $\mathbb{S}^1$, y $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ su elevación a $\mathbb{R}$. Llamamos numero de rotación de g al límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G^n(x) - x}{n} \mod \mathbb{Z},$$

que existe y es independiente de $x \in \mathbb{R}$ y de la elevación.

Rotaciones

Dado un homeo g de grado 1 de $\mathbb{S}^1$:

(a) g tiene órbitas periódicas si y solo si $\rho(g) \in \mathbb{Q}$.

(b) Si $\rho(g) = p/q$ con $(p, q) = 1$ todas las órbitas periódicas de g tienen período q.

(c) Si $\rho(g) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entones el ω-límite es el mismo para todo punto y, o bien es $\mathbb{S}^1$ o un conjunto de Cantor.

Proposición (resumen)

(a) Si $b \leq -15/8$, entonces $\rho = 1/7$. Existe un PF y dos OP_7 explícitas. Toda órbita alcanza alguna de esas órbitas en un número finito de iterados.

(b) Si $-15/8 \leq b \leq -7/4$. ρ varia contínuamente de $1/7$ a $1/6/$.

• Para los valores irracionales hay un PF y el ω-límite de los otros puntos es un subconjunto mínimo cerrado de Γ.

• Para los valores racionales $\rho = p/q$, existen dos OP q-periódicas o bien una órbita doble. El conjunto de periodos es 19,20,25,26,27,31,32,33,34,37,38,39, 40,41 y $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 43$.

(c) Si $-7/4 \leq b \leq -1$, entonces $\rho = 1/6$. Existe un PF y dos OP_6 explícitas. Toda órbita alcanza alguna de esas órbitas en un número finito de iterados.

Qué tenemos en los casos de **Entropía positiva**?

Cuando la entropía topológica es positiva, $F_{|\Gamma}$ tiene órbitas periódicas con infinitos periodos diferentes y las órbitas tienen diferentes comportamientos combinatorios.

Caos de Li y Yorke

Se dice que f es caótica en el sentido de Li y Yorke si tiene puntos periódicos con períodos arbitrariamente grandes y existen un conjunto no numerable $\mathcal{S}$ (*scrambled set*), de modo que para cualquier $p, q \in \mathcal{S}$ y cada punto periódico r de f tenemos

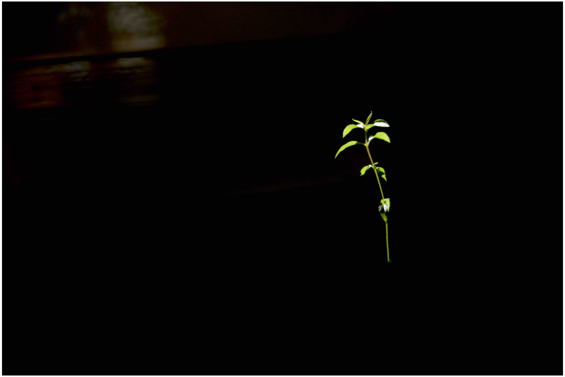
(a) $\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$,

(b) $\liminf_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0$,

(c) $\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(r)| > 0$.

Usando las ideas del libro de Alsedà, Llibre y Misiurewicz se puede demostrar que cuando $F|_\Gamma$ tiene entropía positiva es caótica en el sentido de Li y Yorke.

Muchas gracias.



Mi mesa de trabajo en enero del año pasado: a modo de deseo para todos nosotros.

Felicitats, Jaume!